7.2 $T_3, T_{3\frac{1}{2}}, T_4$- Uzayları

Tanım: (X,τ) topolojik uzay olsun. X'de, keyfi A kapalı kümesi ve keyfi $x \in X-A$ elemanı için $x \in U_x$, $A \subset V$ ve $U_x \cap V = \emptyset$ şartını sağlayacak, U_x ve V açık kümeleri varsa, bu uzaya, düzgün (düzenli, regular) uzay denir.

Düzenli uzay, kapalı kümelerden noktaları ayırmamıza izin verir.

Örnekler: 1) Herhangi metrik uzay, düzenli uzaydır.

2) $X=\{1,2,3\}$, $\tau=\{\emptyset, X, \{1,2\}, \{3\}\}$ olmak üzere (X,τ) topolojik uzayı T_0-uzay değildir. (Dolayısıyla T_1-uzay değildir.) Bu topolojik uzayda kapalı kümeler: $X, \emptyset, \{3\}$ ve $\{1,2\}$ dir. X ve $\emptyset$ kümenin tanımın şartlarını sağladığı açıktır.

$\{3\}$ kapalı küme	$1 \in X-\{3\}$,	$\{3\} \subset \{3\}$, açık	$1 \in \{1,2\}$	$\{3\} \cap \{1,2\} = \emptyset$
	$2 \in X-\{3\}$,	$\{3\} \subset \{3\}$, açık	$2 \in \{1,2\}$	$\{3\} \cap \{1,2\} = \emptyset$
$\{1,2\}$ kapalı küme	$3 \in X-\{1,2\}$,	$\{1,2\} \subset \{1,2\}$,	$3 \in \{3\}$	$\{1,2\} \cap \{3\} = \emptyset$

olduğundan (X,τ) düzenli (düzgün) uzaydır.

Tanım: (X,τ) T_1-uzayı, aynı zamanda düzenli uzay ise T_3-uzay denir.

Örnekler: 1) Her metrik uzay T_3-uzaydır.

2) $\mathbb{R}$'de τ doğal topoloji olmak üzere $\tau_1 = \tau \cup \{U \cap \mathbb{Q} \mid U \in \tau\}$ olsun. τ_1, τ'dan daha kuvvetli ve $(\mathbb{R},\tau)$ Hausdorff olduğundan, $(\mathbb{R},\tau_1)$ topolojik uzayı T_2-uzaydır. $\mathbb{Q} = \mathbb{R} \cap \mathbb{Q}$ olduğundan $\mathbb{Q} \in \tau_1$ dir. Dolayısıyla, $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ irrasyonel sayılar kümesi τ_1 topolojisinde kapalıdır. $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$'yu içeren açık küme yalnız $\mathbb{R}$'dir. $1 \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ ve 1'in herhangi komşuluğu ile $\mathbb{R}$ kesiştiğinden $(\mathbb{R},\tau_1)$ düzenli uzay, dolayısıyla T_3-uzay değildir.

3) 09.01.2004 (Final Sınavı) Soru 2: b) (15 puan) Düzenli T_0-uzayın, T_3-uzay olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm: T_3-uzay, düzenli ve T_1-uzay olduğundan, uzayın T_1-uzay olduğunu göstermemiz kanıt için yeterlidir. Keyfi $x,y \in X$ için x'i içeren y'yi içermeyen bir U_x komşuluğu var. (Aksi halde, y'yi içeren x'i içermeyen U_y komşuluğu alınır.) Buna göre, $X-U_x$ kapalı bir küme ve $x \notin X-U_x$ dir. (X,τ) düzenli olduğundan, öyle U ve V açık kümeleri vardır ki $x \in U$, $X-U_x \subset V$ ve $U \cap V = \emptyset$ dir. $y \in X-U_x$ olduğundan, öyle iki komşuluk bulunoluyoruz ki $x\in U$, $y\in V$ ve $U\cap V=\emptyset$ dir. Yani, (X,τ) T_2-uzaydır. (T_2-uzay $\Rightarrow T_1$-uzay) ■

T_3-uzay $\Rightarrow$ T_2-uzay $\Rightarrow$ T_1-uzay $\Rightarrow$ T_0-uzay

Teorem: (X,τ) topolojik uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

1) (X,τ) düzenli uzaydır.
2) $\forall x\in X$ ve $\forall U_x\in \mathcal{B}(x)$ için $\exists V\in\mathcal{B}(x)$: $\overline{V}\subset U_x$ dir.
3) $\forall U\in\tau$ ve $\forall x\in U$ için $\exists W\in\mathcal{B}(x)$: $\overline{W}\subset U$ dur.
4) Her A kapalı kümesi için, A'yı içeren açık kümelerin kapanışlarının kesişimi A'dır.
5) $A\cap B\neq\emptyset$ şartını sağlayan her A ve her açık B kümesi için $A\cap O\neq\emptyset$ ve $\overline{O}\subset B$ olacak şekilde açık O kümesi vardır.
6) $A\cap B=\emptyset$ şartını sağlayan her $A\neq\emptyset$ ve her kapalı B kümesi için $A\cap O_A\neq\emptyset$ ve $B\subset O_B$ olacak şekilde ayrık O_A ve O_B açık kümeleri vardır.

Kanıt: (1)$\Rightarrow$(2) $x\in X$ ve $U_x\in\mathcal{B}(x)$ olsun. $X-U_x$ kapalı küme ve $x\notin X-U_x$ olduğundan öyle V, W açık kümeleri vardır ki $x\in V\in\tau$, $X-U_x\subset W\in\tau$ ve $V\cap W=\emptyset$ dir. $V\subset \underbrace{X-W}_{\text{kapalı}}$ olduğundan $V\subset\overline{V}\subset X-W\subset U_x$ elde edilir.

(2)$\Rightarrow$(3) $U\in\tau$ ve $x\in U$ olalım. (2)'den öyle bir $W\in\mathcal{B}(x)$ vardır ki $\overline{W}\subset U$ dur.

(3)$\Rightarrow$(4) A kapalı bir küme ve $x\notin A$ olsun. $U=X-A$ açık küme ve $x\in U$ dur. (3)'den $\exists W\in\mathcal{B}(x)$ vardır ki $\overline{W}\subset U$ dur. ($x\in W\subset\overline{W}\subset U$.) W^c kapalı ve $W^c\supset\overline{W}^c\supset U^c=A$ olduğundan W^c, x'i içermeyen A'yı içeren açık kümenin kapanışını içerir. Buna göre, A'yı içeren bütün açık kümelerin kapanışlarının kesişimi x noktasını içermez. Keyfi $x\notin A$ noktası için bu doğru olduğundan, A'yı içeren açık kümelerin kapanışlarının kesişimi A'dır.

(4)$\Rightarrow$(5) $A\cap B\neq\emptyset$ ve B açık küme olsun. $x\in A\cap B$ vardır. $x\notin B^c$ olduğundan (4)'den x'i içermeyen B^c'yi kapsayan bir açık kümenin kapanışı vardır. Buna göre U açık V kapalı olmak üzere $B^c\subset U\subset V$ şartını sağlayan U, V kümeleri vardır ve $x\notin V$ dir. Buna göre, $O=V^c$, x'i içeren bir açık kümedir ve bu yüzden $A\cap O\neq\emptyset$ dir. Ayrıca U^c'nin kapalı olmasından $\overline{O}=\overline{V^c}\subset U^c\subset B$ dir. Bu, A ve B kümeleri için (5)'in kanıtıdır.

(5)$\Rightarrow$(6) $A\cap B=\emptyset$, $A\neq\emptyset$ ve B kapalı küme ise $A\cap B^c\neq\emptyset$ ve B^c açıktır. (5)'de B yerine B^c kullanırsak $A\cap O\neq\emptyset$ ve $O\subset\overline{O}\subset B^c$ olacak şekilde bir O açık kümesini elde ederiz. Bu yüzden $O_A=O$ ve $O_B=\overline{O}^c$ alırsak, O_A ve O_B, $A\cap O_A\neq\emptyset$ ve $B\subset O_B$ şartlarını sağlayan açık kümelerdir. Ayrıca, $O_B=\overline{O}^c\subset O^c=O_A^c$ den dolayı O_A ve O_B ayrıktır.

(6)⇒(1) A'yı tek elemanlı $\{a\}$ alır ve (6)'yı uygularsak, $a \in O_A$ ve $B \subset O_B$ olacak şekilde O_A ve O_B ayrık açık kümelerini elde ederiz. Yani, uzayımız düzenli uzaydır. ■

Düzenli uzay, daha çok (2) şartı ile temsil edilir.

Teorem: a) Bir düzenli uzayın, her altuzayı düzenlidir.
b) Çarpım uzayı $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$'nın düzenli olması için gerek ve yeter şart her $\alpha \in I$ için (X_α, τ_α) topolojik uzaylarının düzenli olmasıdır.

Kanıt: Çalışma sorusu. (Düzenli uzay yerine, T_3-uzay alınırsa da doğrudur.) ■

$T_{3\frac{1}{2}}$-Uzaylar

Tanım: (X, τ) topolojik uzay olsun. X'de keyfi A kapalı kümesi ve keyfi $x \in X - A$ elemanı için $f(x) = 1$ ve $f(A) = \{0\}$ olacak şekilde $f: X \to [0,1]$ sürekli fonksiyonu varsa, bu topolojik uzaya <u>tamamen düzenli</u> (completely regular) <u>uzay</u> denir. Tamamen düzenli uzay aynı zamanda T_1-uzay ise <u>$T_{3\frac{1}{2}}$-uzay</u> veya <u>Tychonoff uzay</u> denir.

Tamamen düzenli uzay, noktalar ile kapalı kümeleri sürekli fonksiyonlar yardımıyla ayırır.

Örnek; Her metrik uzay, Tychonoff uzaydır.

Teorem; Her tamamen düzenli uzay, düzenli uzaydır.

Kanıt: (X, τ) tamamen düzenli uzay, $A \subset X$ kapalı ve $x \in X - A$ olsun. Bu durumda, hipoteze göre, $f(x) = 1$ ve $f(A) = \{0\}$ olacak şekilde bir $f: X \to [0,1]$ fonksiyonu vardır.

$$U_1 = f^{-1}((\tfrac{1}{2}, 1]) = f^{-1}((\tfrac{1}{2}, 3)) = f^{-1}((\tfrac{1}{2}, \infty)), \qquad U_2 = f^{-1}([0, \tfrac{1}{2})) = f^{-1}((-\infty, \tfrac{1}{2}))$$

alırsak, $U_1, U_2 \in \tau$ ve $x \in U_1$, $A \subset U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ dir. Buna göre, (X, τ) düzenli uzaydır. ■

Örnek; (A. Mysior: A regular space which is not completely regular, Proc. Amer. Math. 81, 1981, 652-653.)

$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\} \cup \{a\}$ kümesi üzerinde topoloji şu şekilde verilsin: $y > 0$ olmak üzere her $(x,y) \in X$ noktası X'in izole noktalarıdır. Her $(x,0) \in X$ noktası için,

$$I_x = \{(x,y) \in X \mid 0 \leq y < 2\}, \qquad J_x = \{(x+y, y) \in X \mid 0 \leq y < 2\}$$

doğru parçalarını tanımlayalım. X'de $(x,0)$'ın komşuluklarını

$$\{I_x \cup J_x - U \mid U, (x,0)\text{'ı içermeyen sonlu bir küme}\}$$

şeklinde tanımlıyoruz. a noktasının komşuluklarını ise $U_n(a) = \{a\} \cup \{(x,y) \mid x > n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ olarak tanımlayalım. Her n doğal sayısı için $\overline{U_{n+2}(a)} \subset U_n(a)$ dır. X'in düzenli olduğunu kontrol etmek kolaydır. Şimdi, X'in tamamen düzenli olmadığını gösterelim. $A=\{(x,0) \mid x\leq 1\}$, X'de kapalıdır. f fonksiyonu X üzerinde $f(A)=\{0\}$ olan sürekli bir fonksiyon olsun. $f(a)=0$ olduğunu göstereceğiz. X'de $f^{-1}(\{0\})$ kapalı olduğundan her n doğal sayısı için

$$K_n = f^{-1}(\{0\}) \cap \{(x,0) \mid n-1 \leq x < n\}$$

kümelerinin sonsuz elemanlı olduğunu ispatlamak yetecektir. Bunu, tümevarımla yapacağız. $K_1=\{(x,0) \mid 0\leq x<1\}$ kümesi sonsuz elemanlıdır. Şimdi K_n'nin sayılabilir sonsuz C alt kümesinin olduğunu kabul edelim. Her $(c,0)\in C$ için $J_c-f^{-1}(\{0\})$ kümesi $(c,0)$'ı içermeyen $J_c-f^{-1}(\{0\})=\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ kümesidir. Burada, $G_n=\{x\in J_c \mid \frac{1}{n} < f(x) \leq 1\}$ dır. Her G_n, X'de kapalı kümedir. $(c,0)\notin G_n$, $(c,0)\notin \overline{G_n}$ olduğundan G_n sonlu kümedir. $J_c-f^{-1}(\{0\})$ en fazla sayılabilirdir ve böylece $C'=\bigcup \{J_c-f^{-1}(\{0\}) \mid (x,0)\in C\}$ en fazla sayılabilirdir. P, x-eksenine izdüşüm fonksiyonu olsun. Yani $P((x,y))=x$. $P(C')\cap K_{n+1}$ en fazla sayılabilirdir. Bu yüzden $K_{n+1}-P(C')$ sonsuzdur. $(c',0)\in K_{n+1}-P(C')$ olsun. Bu durumda, her $c\in C$ için $I_{c'}\cap J_c\cap f^{-1}(\{0\})\neq\emptyset$ dir. Bu ise $f((c',0))=0$ olmasını gerektirir. Bu yüzden, $K_{n+1}-P(C')\subset f^{-1}(\{0\})$ dır. Yani, $f^{-1}(\{0\})\cap K_{n+1}$ sonsuzdur. $K_{n+1}\subset U_n$ olduğundan her n için $K_n\cap f^{-1}(\{0\})\neq 0$ dır. Bu yüzden, $f(a)=0$ dır ■

Teorem: a) Tychonoff uzayın, her altuzayı Tychonofftur.

b) $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ çarpım uzayının Tychonoff olması için gerek ve yeter şart her $\alpha\in I$ için (X_α, τ_α)'nın Tychonoff olmasıdır.

c) Bir topolojik uzayın Tychonoff olması için gerek ve yeter şart $\prod [0,1]$ çarpım uzayının bir altuzayına homeomorfik olmasıdır.

Kanıt: Çalışma sorusu. ■

T_4 - Uzayları

Tanım: (X,τ) topolojik uzay olsun. A, B, X'in arakesitleri boş herhangi kapalı alt kümeleri olmak üzere $A\subset U$, $B\subset V$, $U\cap V=\emptyset$ şartlarını sağlayacak U ve V açık kümeleri varsa (X,τ)'ya <u>normal uzay</u> denir.

Herhangi kapalı iki kümenin, açık kümeler yardımıyla ayrılmasına normal uzay demiş oluyoruz.

Örnek: $X=\{1,2,3\}$, $\tau=\{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ olmak üzere, (X,τ) topolojik uzayı, $\{1\}$ kapalı küme olmadığından T_1-uzay değildir. $A=\{2,3\}$ kapalı küme ve $1\notin\{2,3\}$ alalım.

$1\in\{1\}$ ve A kümesini kapsayan en küçük açık küme X olduğundan $\{1\}\cap X\neq\emptyset$ dir. Yani, (X,τ) düzenli uzay değildir. $X, \emptyset, \{2,3\}, \{1,3\}$ ve $\{3\}$ kapalı kümelerdir. Arakesitleri boş olan kapalı kümeler $\emptyset$ ile herhangi kapalı kümelerdir. (X,τ) normal uzaydır.

Tanım: (X,τ) topolojik uzayı normal ve aynı zamanda T_1-uzay ise bu uzaya T_4-uzay denir.

T_4-uzay $\Rightarrow$ $T_{3\frac{1}{2}}$-uzay $\Rightarrow$ T_3-uzay $\Rightarrow$ T_2-uzay $\Rightarrow$ T_1-uzay $\Rightarrow$ T_0-uzay

Örnekler: 1) Her metrik uzay T_4-uzaydır. (Sayfa 79, örnek)

2) (Sorgenfrey Topolojisi, τ_s) $\mathbb{R}$ üzerinde, $[a,b)$ (yarım açık) aralıklarını baz kabul eden topolojiye Sorgenfrey topolojisi denir ve $(\mathbb{R},\tau_s)$ ile gösterilir. Bu durumda, $\mathbb{R}$'ye Sorgenfrey doğrusu denir. Sorgenfrey topolojisi, doğal topolojiden daha kuvvetlidir. Gerçekten, $(a,b)=\bigcup\{[c,b)\mid a<c<b\}=\bigcup_{n=k}^{\infty}[a+\frac{1}{n},b)$ $(a+\frac{1}{k}<b)$ dir.

$(-\infty,a)=\bigcup\{[c,a)\mid c\in\mathbb{R}, c<a\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}[-n,a)$, $[b,\infty)=\bigcup\{[b,c)\mid c\in\mathbb{R}, b<c\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}[b,n)$

kümeleri de bu topolojide açıktır. Bütünleyenleri de açık olduğundan kapalı kümelerdir.

$a<b$ olmak üzere $[a,b)=[a,\infty)-[b,\infty)$ hem açık, hem de kapalı kümedir.

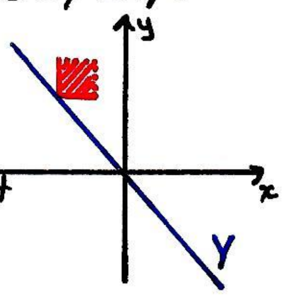
$\forall x\in\mathbb{R}$ için, $[x,x+\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$'na, x'in temel komşuluğu denir.

$(\mathbb{R},\tau_s)$ Sorgenfrey topolojik uzayı (Sorgenfrey doğrusu), düzenli, tamamen düzenli ve normal uzaydır. (Gösteriniz.)

$x\in[x,x+\varepsilon)$ ve $U=[x,x+\varepsilon)$ açık, aynı zamanda kapalı olduğundan $V=U$ seçeriz, $\overline{V}=V$ dir. Dolayısıyla, düzenli uzaydır. Aynı zamanda normaldir de. $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ çarpım uzayında $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ noktasının temel komşuluğu

$$\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid x\leq a<x+\varepsilon_1,\ y\leq b<y+\varepsilon_2\}$$

şeklindedir. $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$ alındığında, (x,y)'yi içeren temel komşuluğu U dersek, $\mathbb{R}^2-U$ açık olduğundan, U aynı zamanda kapalıdır. Yani, $\overline{U}=U$ dur. Dolayısıyla, $\mathbb{R}^2$ çarpım topolojisinde $\mathbb{R}^2$ düzenli uzaydır. Bir elemanlı kümeler, kapalı olduğundan T_1-uzaydır. Yani, $\mathbb{R}^2$, T_3-uzaydır.

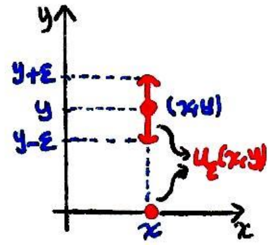


$Y=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y=0\}$ alalım. $U=\{(a,b)\mid x\leq a<x+\varepsilon, -x\leq b<-x+\varepsilon\}$ komşulukları seçildiğinde, $Y\cap U=\{(x,-x)\}\in\tau_Y$ olduğundan, τ_Y diskrit topolojidir. $\mathbb{R}^2$'de Y kapalı küme olduğundan, Y'nin her altkümesi de X'de kapalıdır. (Y, diskrit topolojiye sahip olduğundan). Şimdi,

$A=\{(x,y)\in Y \mid x,y \text{ rasyonel}\}$, $\quad B=\{(x,y) \mid x,y \text{ irrasyonel}\}$

kümelerini alalım. $A, B\subset Y$, $A\cap B=\emptyset$ ve A, B kapalıdır. $A\subset V$, $B\subset W$, $V\cap W=\emptyset$ olacak şekilde V, W açık kümeleri olmalıdır. Böyle kümeler bulunamaz (gösteriniz). Dolayısıyla, $\mathbb{R}^2$ normal uzay değildir. Yani, bu topolojiye göre $\mathbb{R}^2$, T_3-uzay fakat T_4-uzay değildir.

3) 25.04.2007 (Ödev 4) Soru: $\mathbb{R}^2$'de keyfi (x,y) noktasının ε-komşuluğu $U_\varepsilon=U_\varepsilon(x,y)=\{(x,z)\in\mathbb{R}^2 \mid |z-y|<\varepsilon\}\cup\{(x,0)\}$ ile verildiğine göre, bütün (x,y) noktalarının, bütün ε-komşuluklarını baz kabul eden topolojinin düzenli, normal ve T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 olup olmadığını inceleyiniz.



Çözüm: (x,y) noktasının ε-komşuluğu $U_\varepsilon(x,y)$'nin kapanışı

$$\overline{U_\varepsilon(x,y)}=\{(x,z) \mid z\in\mathbb{R}\}$$

dir. Buna göre, $(2,2)$ noktasının 1 komşuluğu $U_1(2,2)=\{(2,y) \mid 1<y<3\}$ dür. $(2,2)$ noktasını içeren ve U_1 tarafından kapsanan komşulukların kapanışı $V=\{(2,y) \mid y\in\mathbb{R}\}$ ve $V\not\subset U_1(2,2)$ olduğundan, bu uzay düzenli değildir. $F=\{(2,y) \mid \frac{3}{2}\leq y\leq \frac{5}{2}\}$ kapalı bir küme ve $F\subset U_1(2,2)$ dir. U_1 tarafından kapsanan ve F'yi kapsayan her komşuluğun kapanışı V olduğundan da normal uzay değildir. $y\neq 0$ ise (x,y) noktasının kapanışı $\overline{\{(x,y)\}}=\{(x,y)\}$ dir. $y=0$ ise $(x,0)$ noktasının kapanışı $\overline{\{(x,0)\}}=\{(x,y) \mid y\in\mathbb{R}\}$ dir. $(x_1,y_1)\neq(x_2,y_2)$ noktaları için $(x_1,y_1)\notin\overline{\{(x_2,y_2)\}}$ veya $(x_2,y_2)\notin\overline{\{(x_1,y_1)\}}$ olacağından, bu uzay, T_0-uzaydır. $(x,0)$ noktaları kapalı olmadığından, bu uzay T_1-uzayı değildir. Dolayısıyla, T_2, T_3, T_4 uzayları değildir.

Teorem: $(X,\mathcal{Z})$ topolojik uzayının, normal olması için gerek ve yeter şart verilen herhangi bir kapalı A kümesi ve $A\subset U$ şartını sağlayan U açık kümesi için

$$A\subset V\subset\overline{V}\subset U$$

olacak şekilde bir V açık kümesinin bulunabilmesidir.

Kanıt: $(X,\mathcal{Z})$ topolojik uzayı normal uzay, A, X'de keyfi kapalı küme ve U, A'yı içeren keyfi açık küme olsun. U açık olduğundan $X-U$ kapalı ve $A\cap(X-U)=\emptyset$ dir. $(X,\mathcal{Z})$ normal uzay olduğundan $A\subset V$, $X-U\subset W$, $V\cap W=\emptyset$ olacak şekilde V, W açık kümeleri vardır. Dolayısıyla $X-W$ kapalı ve $V\subset X-W$ dur. Buna göre, $A\subset V\subset\overline{V}\subset X-W\subset U$ dur.

Tersine, $\forall A$ kapalı kümesi ve $\forall U$, $A\subset U$, U açık kümesi için $\exists V\in\mathcal{Z}$, $A\subset V\subset\bar{V}\subset U$ olsun. A ve B, keyfi arakesitleri boş kapalı kümeler olsun. $X-B$ açık küme ve A'yı içerir. Yani, $A\subset X-B$ dir. Buna göre öyle $V\in\mathcal{Z}$ vardır ki $A\subset V\subset\bar{V}\subset X-B$ dir. $W=X-\bar{V}$ açık kümedir ve B'yi içerir. Buna göre, $A\subset V$, $B\subset W$ ve $V\cap W=\emptyset$ dir. Yani $(X,\mathcal{Z})$ normal uzaydır. ■

Teorem: a) $(X,\mathcal{Z})$ T_4-uzayının kapalı bir altkümesi Y ise $(Y,\mathcal{Z}_Y)$ altuzayı normaldir.

b) $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ çarpım uzayı T_4-uzay ise $\forall\alpha\in I$ için $(X_\alpha,\mathcal{Z}_\alpha)$ topolojik uzaylarda normaldir.

Kanıt: Çalışma sorusu ■

Not: Buçuklu uzaylar ($T_{2\frac{1}{2}}$ gibi) ve T_5-uzay (tamamen normal uzay) gibi uzayları incelememiz dışında tuttuk.

Örnek: 29.05.2012 (Final Sınavı): Soru 4: b) (15 puan) Metrik uzayın, normal uzay olduğunu gösteriniz.

Çözüm: A,B, (X,d) metrik uzayının arakesitleri boş olan iki kapalı kümesi olsun. $f:X\to\mathbb{R}$, $f(x)=D(x,A)-D(x,B)$ olarak tanımlayalım. (Sayfa 25, 2. örnek, $g(x)=D(x,A)$ sürekli olduğundan) $f(x)$ fonksiyonu süreklidir. $U=\{x\in X \mid f(x)<0\}$ ve $V=\{x\in X \mid f(x)>0\}$ kümeleri açık kümelerdir ve $A\subset U$, $B\subset V$, $U\cap V=\emptyset$ dir. Yani, X normal uzaydır.

7.3 Urysohn Önsavı ve Tietze Genişleme Teoremi

Bütün topolojilerde, merkezi ve en zor sorulardan biri fonksiyon genişlemeleridir. (X,τ_X) topolojik uzayının bir altuzayı (Y,τ_Y) $(Y\subset X)$ ve f, Y'den (Z,τ_Z)'e giden sürekli bir fonksiyon olsun. F sürekli ve her $y\in Y$ için $F(y)=f(y)$ olacak şekilde X'den Z'ye giden bir F fonksiyonu var mıdır? Yani, $F|_Y=f$ olacak şekilde

$$F:(X,\tau_X)\to(Z,\tau_Z)$$

sürekli fonksiyonu var mıdır? Bunun cevabı, bazen evet, bazen hayır, çoğu örneklerde ise bilinmiyor.

Örnekler: 1) (X,τ_X) topolojik uzay, $Y\subset X$, X'in altuzayı ve $i:Y\to X$, $i(x)=x$, $\forall x\in Y$ birim fonksiyon olsun. Birim fonksiyon süreklidir ve bir sürekli genişlemesi tabi ki $I:X\to X$, $I(x)=x$ dir. $(I|_Y=i,\ I|_Y(x)=i(x),\ x\in Y.)$

2) Eğer, fonksiyon sabit ise yine sürekli genişlemesi yapılabilir. (X,τ_X), (Z,τ_Z) topolojik uzaylar ve $Y\subset X$ olsun. $f:Y\to Z$, $f(Y)=\{z\}$ sürekli bir fonksiyondur. $F:X\to Z$, $F(X)=\{z\}$ sürekli fonksiyon ve f'nin genişlemesidir. $(F|_Y=f,\ F(x)=f(x), x\in Y.)$

3) $X=[0,1]$, $Y=Z=\{0,1\}$ olmak üzere (X,τ) doğal topoloji ve (Y,τ_Y) ile (Z,τ_Z) diskrit topolojik uzaylar olsun. $f:Y\to Z$, $f(0)=1$, $f(1)=0$ ile tanımlı fonksiyon süreklidir. f'nin X'e sürekli genişlemesi var mıdır?

Cevap: Hayır. Bunu, daha sonra göreceğimiz bağlantılı uzay yardımıyla göstereceğiz: F, f'nin sürekli genişlemesi olsun. $F^{-1}(\{0\})\subset[0,1]$, $F^{-1}(\{1\})\subset[0,1]$, $F^{-1}(\{0\}), F^{-1}(\{1\})\in\tau_X$ ve $F^{-1}(\{0\})\cap F^{-1}(\{1\})=\emptyset$, $F^{-1}(\{0\})\cup F^{-1}(\{1\})=[0,1]$ olduğundan $[0,1]$ bağlantısız uzay olur. Bu ise çelişkidir. Bu durumda, f'nin sürekli genişlemesi olamaz.

Teorem: (X,d) metrik uzay ve A,B, X'in arakesitleri boş kapalı herhangi altkümeleri ise $f(x)=\begin{cases}0, & x\in A\\ 1, & x\in B\end{cases}$, $0\le f(x)\le 1$ olacak şekilde bir sürekli fonksiyon vardır.

Kanıt: A,B arakesitleri boş, kapalı kümeler olsun. $g:X\to[0,\infty)$, $g(x)=D(x,A)$ ile tanımlanan fonksiyon süreklidir. (Sayfa 25, 2. örnek) $\forall x\in X$ için $D(x,A)+D(x,B)>0$ olduğundan $f(x)=\dfrac{D(x,A)}{D(x,A)+D(x,B)}$ fonksiyonu süreklidir ve $f|_A=0$, $f|_B=1$, $f(X)=[0,1]$ dir. (29. Sayfa)

Urysohn Lemma: (X,τ) topolojik uzayının normal olması için gerek ve yeter şart arakesitleri boş herhangi iki kapalı küme A ve B için $f:X\to[0,1]$, $f(x)=\begin{cases}0, & x\in A\\ 1, & x\in B\end{cases}$

şeklinde tanımlanan sürekli bir fonksiyonun var olmasıdır.

Konıt: $\Rightarrow$ Çalışma sorusu.

$\Leftarrow$ $A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde A, B kapalı kümeleri için $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in A \\ 1, & x \in B \end{cases}$ fonksiyonu sürekli olsun. $f^{-1}((-1,\frac{1}{3})) \supset A$ ve $f^{-1}((\frac{1}{2},2)) \supset B$ kümeleri açık ve $f^{-1}((-1,\frac{1}{3})) \cap f^{-1}((\frac{1}{2},2)) = \emptyset$ olduğundan (X,τ) normal uzaydır. ■

Sonuç: Herhangi normal uzay (veya T_4-uzay) tamamen düzenlidir.

Tietze Genişleme Teoremi: (X,τ) T_4-uzay ve Y, X'in herhangi kapalı alt kümesi olsun. $(\mathbb{R},\tau)$ doğal topolojik uzay olmak üzere $f: Y \to \mathbb{R}$ herhangi fonksiyon, sürekli fonksiyon ise $F: X \to \mathbb{R}$ sürekli genişlemesi vardır.

Konıt: Çalışma sorusu. ■

Teoremde, $\mathbb{R}$ yerine, metrik uzay alınsa bile teorem doğru değildir.

Örnek: 24.05.2007 (Final Sınavı) Soru 2: d) (10 puan) X birden fazla eleman içeren bir küme olmak üzere, (X,τ) T_4-uzay olsun. X'den $[0,1]$'e giden sabit olmayan bir sürekli fonksiyonun olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $x_1 \neq x_2$ olmak üzere $x_1, x_2 \in X$ olsun. X, T_4-uzay olduğundan T_1-uzaydır. Yani, her bir elemanlı küme kapalıdır. Buna göre, $\{x_1\}$ ve $\{x_2\}$ kapalı kümelerdir ve $\{x_1\} \cap \{x_2\} = \emptyset$ dir. Urysohn teoremine göre, X normal olduğundan, öyle bir sürekli $f: X \to [0,1]$ fonksiyonu vardır ki $f(x_1)=0$ ve $f(x_2)=1$ dir.